分类号：　O156　　　　学校代码：　10697

密　级：　公开　　　　学　　号：　201120505

西北大学

Northwest University

硕士学位论文

MASTER'S DISSERTATION

几类包含数论函数的方程及其解

学科名称：　基础数学

作　　者：　车 顺　　　　指导老师：　张文鹏 教授

西北大学学位评定委员会

二〇一四年

西北大学学位论文知识产权声明书

本人完全了解西北大学关于收集、保存、使用学位论文的规定。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版。本人允许论文被查阅和借阅。本人授权西北大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。同时授权中国科学技术信息研究所等机构将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》或其它相关数据库。

保密论文待解密后适用本声明。

学位论文作者签名：车顺　指导教师签名：张文鹏

2014年6月3日　　2014年6月3日

西北大学学位论文独创性声明

本人声明：所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，本论文不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得西北大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：车顺

2014年6月3日

摘要

数论有着悠久的历史,从数字产生开始就伴随出现了一些简单地数论问题,经历几千年的发展, 这门古老的学科魅力依旧, 在科技迅猛发展的近现代依然扮演着不可或缺的角色.其中一些数论问题的研究和解决具有重大而深远的意义. 随之而来也不断有一些新的问题被提出并吸引一大批学者去研究和解决它,其中方程的解的问题一直都是数论研究中的一项重要内容.

本文主要是运用初等方法对Smarandache函数;约数和函数和其他一些特殊数论函数方程的解得问题进行了研究, 具体研究成果包括以下几方面的内容:

1. 对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$, 而伪 Smarandache 函数 $Z_1(n)$ 定义为 $Z_1(n)=\min\{m: m\in N, n\mid 1^2+2^2+\cdots+m^2\}$, 其中 N 为所有正整数集合. 主要目的是研究方程 $Z_1(n)+1=S(n)$ 的可解性, 并利用初等方法得到了该方程的所有正整数解，同时也给出了所有解的具体表示形式.

2. 对于正整数 n, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式, 又设 $\sigma(n)$ 是 n 的约数之和. 本文运用初等数论方法讨论了函数方程 $\sigma(n)=k(n+1)$ 的正整数解 (k,n)，证明了: 当 $r=2$ 时, 该方程仅有正整数解 $(k,n)=(2,2^{\alpha_1}p_2)$, 其中 $p_2=2^{\alpha_1+1}-3$.

3. 设b是大于3的正奇数. 本文运用初等方法以及同于性质讨论了不定方程$2^y n^{y-x}=(b+2)^x-b^x$的正整数解(x,y,n)的存在性问题, 对于$b\not\equiv 7(\mathrm{mod}8)$的情况给出了该方程的全部解，从而部分地解决了该方程的可解性问题.

关键词

函数方程; 正整数解; 约数和; 初等方法;指数Diophantine方程.

Abstract

Number theory has a long history,from Numbers start with some simple arithmetic problems, after thousands of years of development, the ancient subject, charming, in the rapid development of science and technology still plays an indispensable role in modern times, some theory problems of research and has great and far-reaching significance. Along with some new problems have been proposed and attract a large number of scholars to study and solve it, and the problem that the equations have been an important content in the study of number theory.

This paper mainly through the elementary method to study the Smarandache function; sum of divisors function and some other special arithmetic function equation can solve problem of specific research results include the following aspects of content:

1.For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$. That is, $S(n) = \min\{m : m \in N, n \mid m!\}$. The pseudo Smarandache function $Z_1(n)$ defined as the smallest integer m such that $n|\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ or $Z_1(n) = \min\{m : m \in N, n \mid 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2\}$, where $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. The main purpose is to study the solvability of the equation $Z_1(n) + 1 = S(n)$, and using the elementary method to give its all positive solutions, at the same time, we also give their exact representation of all solutions.

2.For any positive integer n, let $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ denote the factorization of n, and let $\sigma(n)$ denote the sum of divisors of n . In this paper, using some elementary number theory methods, the positive integer solutions (k,n) of the functional equation $\sigma(n) = k(n+1)$ are discussed . We prove that if $r = 2$, then

the equation has only the positive integer solutions $(k,n) = (2, 2^{\alpha_1}p_2)$, where $p_2 = 2^{\alpha_1+1} - 3$.

3.Let b be a positive odd integer with $b > 3$. In this paper, using some elementary methods and the properties of congruence, the positive integer solutions (x, y, n) of the equation $2^y n^{y-x} = (b+2)^x - b^x$ are discussed, and all solutions of the equation are determined for $b \not\equiv 7(\mathrm{mod}8)$, which part solved the problems of the solvability of the equation.

Keywords

Functional equation; Positive integer solution; sum of divisors; Elementary method; exponential diophantine equation.

目　录

中文摘要 i

英文摘要 ii

第一章　绪论 1

§1.1　数论发展历史 1

§1.2　研究背景 3

§1.3　研究成果及内容 5

第二章　包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 及 $Z_1(n)$ 的方程及其整数解 6

§2.1　引言 6

§2.2　定理的证明 7

第三章　关于数论函数方程 $\sigma(n) = k(n+1)$ 解的问题 10

§3.1　引言 10

§3.2　定理的证明 11

第四章　关于Diophantine方程$2^y n^{y-x} = (b+2)^x - b^x$ 15

§4.1　引言 15

§4.2　两个引理 16

§4.3　定理的证明 17

总结与展望 20

参考文献 21

攻读硕士学位期间取得的科研成果 24

致谢 25

第一章 绪论

§1.1 数论发展历史

自从人类有文字记载以来，1, 2, 3, $\cdots$ 就已经与人们的日常生活紧密联系在一起，随着整数的产生，伴随着也出现了一些与之有关的数学问题, 在日常生产生活中形成的与整数有关的问题及解决此类问题的方法也是数论形成的雏形. 自古代开始, 数学家就非常重视对整数性质的研究，然而直到 19 世纪还没有形成一门完整统一的学科. 而我国作为世界四大文明古国, 亦有许多著名的古籍中都有关于数论的记载.《孙子算经》下卷第二十六题中所记载就是孙子命题并附有解答，而将其推广并创立出完整理论体系的则是我国南宋著名数学家秦九韶.也就是如今闻名世界的"中国剩余定理"即孙子定理. 它的产生对数学的发展起着至关重要的推动作用,为数论的发展做出了不可磨灭的贡献.

由于各种原因中国人在曾经创造了无上辉煌之后逐渐沉寂,在经历了一些列战乱之后中国进入了漫长而黑暗的时期.之后的近千年中在包括数学领域在内的众多自然科学领域均远远落后于西方世界,而世界的另一端却没有因此停下脚步,发生于14世纪首起于意大利的文艺复兴运动在之后的近两百年席卷欧洲,极大地解放了思想领域,随之而飞速发展的就是自然科学技术等.从15 世纪开始, 欧洲大陆就不断涌现出一大批著名的数学家如费马, 欧拉, 高斯, 黎曼等人. 他们对于数学的发展特别是数论的发展做出了卓越的贡献,解决了数学发展过程中的诸多瓶颈问题并提出了一系列具有深远影响的问题猜想. 其中标志性的事件就是 1801 年德国数学家高斯发表的著作《算术研究》,它的产生书揭开了现代数论的新篇章, 同时也标志着数论正式成为一门独立的学科. 在这该书中高斯首次把整数研究符号统一化, 并提出同余理论, 发现著名的二次互反律. 而数论的重要性和巨大魅力也让高斯赞道数论可比数学中的皇冠, 许多数学家之后也将数论中一些疑难问题誉为皇冠上的明珠,因为其独特的魅力无时无刻都在吸引着许多数学家为了摘取这些明珠而进行深入的研究. 下面列举一些著

名的数论难题: 费马猜想与黎曼猜想. 下面是费马提出的猜想:

当 $n > 2$ 时, 关于 x, y, z 的不定方程

$$x^n + y^n = z^n.$$

的整数解都是平凡解, 即

当 n 是偶数时:$(0, \pm m, \pm m)$ 或 $(\pm m, 0, \pm m)$

当 n 是奇数时:$(0, m, m)$,$(m, 0, m)$ 或 $(m, -m, 0)$

这是 17 世纪由法国数学家费马提出之后被称为“费马猜想”该猜想最早出现在费马的《页边笔记》之中.该猜想自提出以来无数数学家证明此问题而不懈努力, 尽管费马表明他已经找到一个绝妙的证明却因页边没有足够的空位写下，但终究是没有留给后来者任何的线索.为了该猜想的证明, 数学家们经过三个多世纪的努力，直至英国数学家安德鲁·怀尔斯（Andrew John Wiles）在九十年代初才给与了彻底的证明，至此费马猜想终于可以被正式称之为“费马大定理”. 困扰着无数数学家们三百多年的数学难题终得以完美解决. 同时费马还提出过许多猜想比如平方数问题, 费马数等, 费马同时还研究过完全数, 亲和数等. 他对数论的发展研究做出了不可磨灭的贡献, 极大地对推进了近现代数论的发展.

另一著名的猜想即黎曼猜想它是由德国大数学家波恩哈德·黎曼（Bernhard Riemann）于 1859 年提出. 它是数学中一个重要且著名的未解决问题，自提出以来至今吸引了许多出色的数学家为之绞尽脑汁却仍然没有完全解决. 希尔伯特曾说，如果他在沉睡 1000 年后醒来，他将问的第一个问题就是：黎曼猜想得到证明了吗?

中国在经历了漫长的近乎停滞的发展后终于在20世纪开始奋起直追,在一些基础科学领域发展迅速,而作为数学中占有极大比重的数论中国人再次向世界证明了自己. 先后涌现出一大批享誉中外的著名数学家如华罗庚,闵嗣鹤,王元,陈景润,潘承洞等.特别是陈景瑞对于哥德巴赫猜想的证明,虽然没有完全证明该猜想,但他得到的结果却是迄今为止最为完美的结论.正因为这样一批杰出

数学家的引导和影响,使得中国的数学特别是数论学科的发展后来居上,处于世界领先水平.

同样也正是因为无数的数学家一直以来的研究和不断出现的未解决的问题的使得数论这门古老的学科也焕发出了新的活力, 并衍生出了许多的分支学科如解析数论, 代数数论, 几何数论，计算数论, 超越数论, 组合数论等.使得数论能够在科技飞速发展的今天也占有重要的位置和作用.

§1.2　研究背景

数论函数方程的解得问题一直是数论研究特别是初等数论中的一项重要内容,我国古代也有许多关于这方面的记载.在如今研究方程的解依然具有重要且深远的意义. 下面我们来介绍几类函数方程,首先是著名的 Smarandache 函数 $S(n)$[1], 它是由著名美籍罗马尼亚数论专家 F.Smarandache 教授 1993 年在他的《Only Problems, Not Solutions》一书中首先提出的，之后便吸引了一大批学者去研究, 先来了解下相关内容:

对任意正整数 n, Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m!$. 即就是：$S(n) = \min\{m : m \in N, n \mid m!\}$.

许多学者对此进行了研究:

陆亚明 [6] 研究了方程

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = \sum_{i=1}^{k} S(m_i)$$

的可解性, 利用解析数论中的三素数定理证明了对任意正整数 $k \geq 3$, 该方程有无穷多组正整数解 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

张文鹏 [7] 研究了函数 $Z(n) = \min\{m : m \in N, n \mid \frac{m(m+1)}{2}\}$ 对于方程 $Z(n) = S(n)$ 及 $Z(n) + 1 = S(n)$ 的可解性问题，给出了如下的结论:

对任意的正整数 $n > 1$, 函数方程 $Z(n) = S(n)$ 成立当且仅当 $n = pm$, 其中 p 为奇素数, m 为 $\frac{p+1}{2}$ 的任意大于 1 的因数.

对任意正整数 n, 函数方程 $Z(n)+1=S(n)$ 成立当且仅当 $n=pm$, p 为奇素数, m 为 $\frac{p-1}{2}$ 的任意正因数.

在《Only Problems, Not Solutions》一书中提出的许多问题都得到了解决和推广, 并获得了不少有价值的结论, 这里就不再一一赘述.

其次介绍一下约数和函数, 约数和函数$\sigma(n)$是数论中的一个基础而又重要的数论函数,它与许多著名的数论问题都有联系,如亲和数问题及完全数问题,相关内容如下:

对于任意的正整数 n, 设 $\sigma(n)$ 表示 n 的所有约数之和,即

$$\sigma(n)=\sum_{d|n} d$$

称为 n 的约数和函数.关于$\sigma(n)$进行了许多研究:

Florian Luca [24]证明了对任意的正整数x都不满足等式$\sigma(F_n)=\sigma(x)=F_n+x$即

定理 任意一个Fermat数既不是完全数也不与任何正整数成为一对亲和数.

徐闯和徐润章 [30] 讨论了 函数方程$R(n)=\sigma(n)/(n+1)$ 的整数值问题.

最后我们再来了解一下有关Diophantine方程,Diophantine方程也就是整系数多项式方程是指变量仅为整数的整数等式,即

$$a_1x_1^{b_1}+a_2x_2^{b_2}+\cdots+a_nx_n^{b_n}=c$$

且a_j,b_j,c均为整数.若能找到其中一组整数解就称之为有整数解.

该方程理论的形成和发展自二十世纪开始至今是数学特别是数论发展和研究的一个很重要的内容.本文就是在根据L. Jeśmanowicz [31]和N. Terai [32]等人关于方程

$$a^x+b^y=c^z, x,y,z\in\mathbb{N}$$

的早期工作和提出的问题研究的基础上进行了推广和延伸.

§1.3 研究成果及内容

本文主要内容如下：

1. 研究方程 $Z_1(n)+1=S(n)$ 的可解性, 并利用初等方法得到了该方程的所有正整数解，同时也给出了所有解的具体表示形式.

2. 运用初等数论方法讨论了函数方程 $\sigma(n) = k(n+1)$ 的正整数解 (k,n)，证明了: 当 $r=2$ 时, 该方程仅有正整数解 $(k,n)=(2,2^{\alpha_1}p_2)$, 其中 $p_2=2^{\alpha_1+1}-3$.

3. 运用初等方法以及同余性质讨论了不定方程$2^y n^{y-x} = (b+2)^x - b^x$的正整数解$(x,y,n)$的存在性问题, 对于$b \not\equiv 7(\mathrm{mod} 8)$ 的情况给出了该方程的全部解，从而部分地解决了该方程的可解性问题.

第二章 包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 及 $Z_1(n)$ 的方程及其整数解

§2.1 引言

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m!$. 即就是：$S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$; 而伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|1+2+\cdots+m$. 或者 $Z(n)=\min\{m: m\in N, n\mid 1+2+\cdots+m\}$, 其中 N 为正整数集合. 本文定义一个新的伪 Smarandache 函数 $Z_1(n)$ 如下： $Z_1(n)$ 为最小的正整数 m 使得 $n|1^2+2^2+\cdots+m^2$. 或者 $Z_1(n)=\min\{m: m\in N, n\mid 1^2+2^2+\cdots+m^2\}$, 关于函数 $S(n)$及$Z(n)$ 的性质以及包含该函数的方程，许多学者进行了研究，获得了不少重要的结论, 参阅文献 [5]-[11]. 例如徐哲峰 [5] 对 $S(n)$ 的值分布进行了研究，证明了渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $P(n)$ 为 n 的最大素因子，$\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

陆亚明 [6] 研究了方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=\sum_{i=1}^{k}S(m_i)$$

的可解性, 利用解析数论中的三素数定理证明了对任意正整数 $k\geq 3$, 该方程有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

张文鹏 [7] 研究了函数 $Z(n)=\min\{m: m\in N, n\mid \frac{m(m+1)}{2}\}$ 对于方程 $Z(n)=S(n)$ 及 $Z(n)+1=S(n)$ 的可解性问题，给出了如下的结论：

对任意的正整数 $n>1$, 函数方程 $Z(n)=S(n)$ 成立当且仅当 $n=pm$, 其中 p 为奇素数, m 为 $\frac{p+1}{2}$ 的任意大于 1 的因数.

对任意正整数 n, 函数方程 $Z(n)+1=S(n)$ 成立当且仅当 $n=pm$, p 为奇素数, m 为 $\frac{p-1}{2}$ 的任意正因数.

函数 $Z(n)$ 的有关性质也有不少学者进行了研究参阅文献 [16]-[18], 关于函数 $Z_1(n)$ 的性质，我们至今知道的很少，甚至还不知道是否有人研究. 然而，我们认为这个函数与 $Z(n)$ 应该有类似的性质，因此值得研究. 本文主要是利用初等方法对方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 的可解性进行研究，并获得了该方程的所有正整数解，同时也给出了该方程所有解的确切表示形式, 即就是证明了下面的:

定理. 对任意正整数 n, 方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 成立当且仅当 $n=pl$, 其中 $p\geq 5$ 为素数且 $2p-1$ 为合数, l 为 $\frac{(p-1)(2p-1)}{6}$ 且不是 $\frac{p^2-1}{24}$ 的任意正因数.

§2.2 定理的证明

这节我们利用初等方法以及 Smarandache 函数 $S(n)$ 的有关性质给出定理的直接证明. 文中所用初等数论知识可以在文献 [3][12][19] 中找到，这里不再重复. 下来证明本文的结论:

对任意正整数 n，假定它的标准分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

于是由 Smarandache 函数的性质可得

$$S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{\alpha_k})\}.$$

不妨设 $S(n)=S(p^\alpha)$, 于是由 $S(n)$ 的简单性质可知

$$S(n)=S(p^\alpha)\leq p\alpha,$$

令 $S(p^\alpha)=ph$, 可知 $h\leq\alpha$, 那么 $n=p^\alpha l,(l,p)=1,S(l)<S(p^\alpha)$, 那么要使方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 成立, 即 $ph=Z_1(n)+1$, 必有 $Z_1(n)=ph-1$. 我们再从 $Z_1(n)$ 的定义出发可知:

$$n|\frac{(ph-1)ph(2ph-1)}{6}$$

, 即

$$p^{\alpha}l|\frac{(ph-1)ph(2ph-1)}{6}, p^{\alpha-1}l|\frac{(ph-1)h(2ph-1)}{6}$$

由 $(ph-1,p)=1,(2ph-1,p)=1$ 知若要上式成立则有 $p^{\alpha-1}\mid h$. 现在对 α 进行分类讨论:

(1). 当 $\alpha=1$ 时, $p^{\alpha-1}=p^0=1$, 可得 $1\mid h$. 因为 $h\le\alpha$, 所以 $h=1$. 从而有 $n=pl,(p,l)=1,S(n)=S(pl)=S(p),Z_1(n)=p-1$. 从 $Z_1(n)$ 定义出发有

$$n|\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

这里令 $p\geq 5$, 即

$$pl|\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

那么 $p\mid m$, $p\mid m+1$ 或 $p\mid 2m+1$, 因为 $Z_1(n)$ 为满足方程的最小的正整数 m. 所以 $p=m$ 或 $p=m+1$ 或 $p=2m+1$,

当 $p=m$ 时,

$$n|\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

即

$$l|\frac{(p+1)(2p+1)}{6}$$

方程 $Z_1(n)=p$ 与 $S(n)=Z_1(n)+1$ 矛盾, 当 $p=m+1$ 时 $m=p-1$,

$$n|\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$$

即

$$l|\frac{(p-1)(2p-1)}{6}$$

方程 $Z_1(n)=p-1$ 满足 $S(n)=Z_1(n)+1$, 因为 $(p-1,p)=1,(2p-1,p)=1$ 若 $2p-1$ 为素数则 $S(n)=2p-1$ 与 $S(n)=p$ 矛盾, 所以 $2p-1$ 为合数,

当 $p=2m+1$ 时

$$m=\frac{p-1}{2}, n|\frac{p(p^2-1)}{24}$$

即

$$l|\frac{p^2-1}{24}, Z_1(n)=\frac{p-1}{2}$$

因为 $S(n)=p$ 这时 $Z_1(n)+1=\frac{p+1}{2}$ 与 $S(n)=Z_1(n)+1$ 矛盾, 从而得到满足条件的 $Z_1(n)+1=S(n)$ 解为 $2p-1$ 为合数, l 为 $\frac{(p-1)(2p-1)}{6}$ 且不是 $\frac{p^2-1}{24}$ 的任意正因数.

(2). 当 $\alpha \geq 2$ 时有 $p^{\alpha-1} \mid h$, 即 $p^{\alpha-1} \leq h \leq \alpha$, 有 $S(n)=Z_1(n)+1$, 因为任意的素数 $p \geq 3, \alpha \geq 2$ 不等式均不成立,

当 $p=2, \alpha=2$ 时 $S(n)=Z_1(n)+1$ 成立, 带入方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 不成立, 且 $p=2, \alpha>2$ 时不等式不成立, 所以 n 只能分解为 $n=pl,(l,p)=1$. 也就是对任意的 $n=p^\alpha l, \alpha \geq 2$ 方程 $S(n)=Z_1(n)+1$ 无解.

现在考虑当 $p=2,3$, 即 $S(n)=1,2,3,4$ 时有 $n=1,2,3,4,6,8,12,24$. 分别代入 $S(n)$ 和 $Z_1(n)+1$ 中:

$n=1, S(1)=1, Z_1(1)+1=2;$

$n=2, S(2)=2, Z_1(2)+1=4;$

$n=3, S(3)=3, Z_1(3)+1=5;$

$n=6, S(6)=3, Z_1(6)+1=5;$

$n=4, S(4)=4, Z_1(4)+1=8;$

$n=8, S(8)=4, Z_1(8)+1=16;$

$n=12, S(12)=4, Z_1(12)+1=9;$

$n=24, S(24)=4, Z_1(24)+1=144.$

综合以上各种情况，定理得到了证明.

第三章　关于数论函数方程 $\sigma(n)=k(n+1)$ 解的问题

§3.1　引言

设 N 是全体正整数的集合. 对于正整数 n, 设 $\sigma(n)$ 表示 n 的所有约数之和,即

$$\sigma(n)=\sum_{d|n} d$$

称为 n 的约数和函数. 这是一个基本而又重要的数论函数, 历史上很多著名的数学难题 (例如完全数问题, 亲和数问题) 都与该函数有关 (参见文献 [20]-[26]).

Florian Luca [24]证明了对任意的正整数x都不满足等式$\sigma(F_n)=\sigma(x)=F_n+x$即

定理1 任意一个Fermat数既不是完全数也不与任何正整数成为一对亲和数.

沈忠华和于秀源[25]证明了对任意正整数y均满足不等式$\sigma(f(x))=\sigma(y)=f(x)+y$,其中$f(x)=x^{2^x}+1$,$x$是一个任意的正偶数,并证明了以下几个定理

定理2 对于正整数$x,y,x>y\geq 1,(x,y)=1$,x,y一奇一偶,定义$f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$,则$f(x,y)$不与任何正整数构成一对亲和数.

定理3 对于正整数$x,y,x>y\geq 1,(x,y)=1$,x,y一奇一偶,定义$f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$,则$f(x,y)$不是完全数.

定理4 对于形如$f(a,b)=a^{2^n}+b^{2^n}((a,b)=1.a>b\geq 1)$的一类正整数,它的所有素因数的个数(含相等的)$k$不超过$[\frac{(a-1)2^n}{n+1}]$个.$[x]$ 表示不超过x的最大整数.

最近徐闯和徐润章 [30] 讨论了 $R(n)=\sigma(n)/(n+1)$ 的整数值问题. 显然,这一问题等价于函数方程

$$\sigma(n)=k(n+1),k,n\in N \tag{3.1}$$

的求解问题. 对此, 文 [30] 提出了以下猜想:

猜想方程 (3.1) 没有适合 $k>2$ 的解(k,n).

由于方程 (3.1) 在形式上与完全数和广义完全数的定义相似 (参见文 [20] 的问题 B_1), 所以可以肯定这是一个非常困难的问题.

当 $n>1$ 时, 设

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r} \tag{3.2}$$

是 n 的标准分解式, 其中 $p_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是适合 $p_1<p_2<\cdots<p_r$ 的素数,$\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是正整数. 对此，文 [5] 运用初等方法证明了: 当 $r=1$ 时, 方程 (3.1) 仅有解 $(k,n)=(1,p_1)$; 当 $r=2$, 且 $\min\{\alpha_1,\alpha_2\}=1$, 方程 (1) 仅当 $p_1=2$ 且 $p_2=2^{\alpha_1+1}-3$ 时有解 $(k,n)=(2,2^{\alpha_1}p_2)$. 这些结果解决了上述猜想在 $r=1$ 和 $r=2$ 且 $\min\{\alpha_1,\alpha_2\}=1$ 时的情况. 本文运用初等方法完整地解决了该猜想在 $r=2$ 时的情况, 即证明了:

定理 5 当 $r=2$ 时, 方程 (3.1) 仅有解 $(k,n)=(2,2^{\alpha_1}p_2)$, 其中 $p_2=2^{\alpha_1+1}-3$.

另外, 文 [30] 还讨论了 n 是无平方因子时的情况, 证明了: 对于给定的正整数 t,$t>1$, 方程 (3.1) 至多有一组解 (k,n) 适合 $k=t$ 且 n 是无平方因子正整数. 对此, 本文证明了以下结果:

定理 6 方程 (3.1) 仅有解 $(k,n)=(1,2)$ 可使 n 是无平方因子正偶数.

§3.2 定理的证明

证明结论之前首先给出几个需要的引理：

引理1 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中$\alpha_i>0,i=1,2\cdots,k,p_1<p_2<\cdots<p_k$是素数,则

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

证明 参见文献[12][22][28]

引理2 对任意的素数p,有

$$1+\frac{1}{p_j}+\cdots+\frac{1}{p_j^{\alpha_j}}<\frac{p_j}{p_j-1}, j=1,2,\cdots$$

证明 设

$$1+\frac{1}{p_j}+\cdots+\frac{1}{p_j^{\alpha_j}}=f(\alpha_j)$$

, 因为$\frac{1}{p_j^s}>0, s=1,2,\cdots$,则$f(\alpha_j)>f(\alpha_j-1)$ 那么

$$f(\alpha_j)=\frac{1-(\frac{1}{p_j})^{n+1}}{1-\frac{1}{p_j}}<\frac{p_j}{p_j-1}$$

$j=1,2,\cdots$,p为素数.

定理 5 的证明: 因为 $\sigma(1)=1$, 所以方程 (3.1) 显然没有适合 $n=1$ 的解 (k,n). 当 $n>1$ 时, 设 (3.2) 是 n 的标准分解式. 如果 $r=2$, 则从 (3.2) 可得

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \tag{3.3}$$

设 (k,n) 是方程 (1) 的一组适合 $r=2$ 的解. 根据 $\sigma(n)$ 的计算公式 (参见文 [30] 的引理 1), 从 (3.1) 和 (3.3) 可得

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\right)=k(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}+1) \tag{3.4}$$

由于 (3.4) 的左边大于 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}+1$, 故必有 $k>1$ 以及

$$k\geq 2 \tag{3.5}$$

同时, 由引理2可得

$$\frac{1}{p_j^{\alpha_j}}\left(\frac{p_j^{\alpha_j+1}-1}{p_j-1}\right)=1+\frac{1}{p_j}+\cdots+\frac{1}{p_j^{\alpha_j}}<\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{p_j^s}=\frac{p_j}{p_j-1}, j=1,2. \tag{3.6}$$

所以从 (3.4),(3.5) 和 (3.6) 可得

$$\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)>k\geq 2 \tag{3.7}$$

如果 $p_1\geq 3$, 则因 $p_2\geq 5$, 故从 (7) 可得 $2>\frac{15}{8}>2$ 这一矛盾. 由此可知

$$p_1=2 \tag{3.8}$$

此时, 假如 $k>2$, 则因 $k\geq 3$ 且 $p_2\geq 3$, 所以从 (3.4),(3.6) 和 (3.8) 可得 $3>3$ 这一矛盾. 因此, 必有

$$k=2 \tag{3.9}$$

将 (3.8) 和 (3.9) 代入 (3.4) 立得

$$(2^{\alpha_1+1}-1)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\right)=2(2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}+1) \tag{3.10}$$

设

$$d=\frac{p_2^{\alpha_2}-1}{p_2-1}=p_2^{\alpha_2-1}+\cdots+p_2+1 \tag{3.11}$$

因此从 (3.11) 可知 $p_2^{\alpha_2}\equiv 1(\mathrm{mod} d)$ 以及

$$\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\equiv p_2^{\alpha_2}+(p_2^{\alpha_2-1}+\cdots+p_2+1)\equiv 1(\mathrm{mod} d) \tag{3.12}$$

所以从 (3.10) 和 (3.12) 可得

$$2^{\alpha_1+1}-1\equiv(2^{\alpha_1+1}-1)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\right)\equiv 2(2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}+1)\equiv 2^{\alpha_1+1}+2(\mathrm{mod} d) \tag{3.13}$$

从 (3.13) 可知 $3\equiv 0(\mathrm{mod} d)$, 故有

$$1\leq d\leq 3 \tag{3.14}$$

假如 $\alpha_2>1$, 则从 (11) 可知 $d\geq p_2+1>3$, 与 (3.14) 矛盾, 故必有

$$\alpha_2=1 \tag{3.15}$$

将 (3.15) 代入 (3.10) 可得

$$(2^{\alpha_1+1}-1)(p_2+1)=2(2^{\alpha_1}p_2+1) \tag{3.16}$$

又从 (3.16) 可知

$$p_2=2^{\alpha_1+1}-3 \tag{3.17}$$

综上所述可知: 当 $r=2$ 时, 方程 (1) 仅有解 $(k,n)=(2,2^{\alpha_1}p_2)$ 其中 p_2 适合 (3.17). 证完.

定理 6的证明: 对于无平方因子正偶数 n,n 的标准分解式必为 $n=2$ 或者

$$n=2p_1\cdots p_r \tag{3.18}$$

其中 $p_i(i=1,\cdots,r)$ 是适合 $p_1<\cdots<p_r$ 的奇素数.

当 $n=2$ 时, 方程 (1) 显然仅有解 $(k,n)=(1,2)$.

当 $n>2$ 且 n 可表示成 (3.18) 时, 如果方程 (3.1) 有解 (k,n), 则必有

$$3(p_1+1)\cdots(p_r+1)=k(2p_1\cdots p_r+1) \tag{3.19}$$

因为 $p_i+1(i=1,\cdots,r)$ 都是偶数,$2p_1\cdots p_r+1$ 是奇数, 所以从 (19) 可知 $2^r \mid k$. 由此可得

$$k\geq 2^r \tag{3.20}$$

从 (3.19) 和 (3.20) 可知

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_r}\right)>k\geq 2^r \tag{3.21}$$

另外, 由于 $p_i\geq 3(i=1,\cdots,r)$, 所以

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_r}\right)\leq\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^r=\frac{2^{2^r-1}}{3^{r-1}} \tag{3.22}$$

结合 (3.21) 和 (3.22) 立得 $\frac{2^{2^r-1}}{3^{r-1}}>2^r$, 即 $2^{r-1}>3^{r-1}$ 这一矛盾. 因此, 方程 (3.1) 没有解 (k,n) 可使 n 是大于 2 的无平方因子正偶数. 证完.

第四章　关于Diophantine方程$2^y n^{y-x} = (b+2)^x - b^x$

§4.1　引言

设$\mathbb{N}$是正整数的集合. 设a, b, c是大于1且两两互素的正整数. 根据L. Jeśmanowicz [31]和N. Terai [32]等人关于方程

$$a^x + b^y = c^z, x, y, z \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

的早期工作和提出的问题,从文[33]可知目前人们对该方程有以下猜想:

猜想

当$a < b$时, 除了

$$(a, b, c) = (2, 7, 3), (2, 2^r - 1, 2^r + 1), r \in \mathbb{N}, r > 1 \tag{4.2}$$

此外,方程(4.1)至多有一组解(x, y, z).然而，T. Miyazaki和A. Togbé [4]在讨论$a = 2$, b是大于3的正奇数且$c = b + 2$这一情况时发现了上述猜想的一个反例, 即当$(a, b, c) = (2, 89, 91)$时, 方程(4.1)有2组解$(x, y, z) = (1, 1, 1)$和$(13, 1, 2)$. 因此, 这一情况引起了广泛的关注. 最近, M. Tang和Q. -H. Yang [35]对此讨论了更一般的方程

$$(bn)^x + (2n)^y = ((b+2)n)^z, x, y, z, n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

显然, 对于任何的b,方程(4.3)都有解$(x, y, z, n) = (1, 1, 1, s)$, 其中$s$是任意正整数. 因此, 这些解称为方程(4.3)的平凡解, 该方程适合$(x, y, z) \neq (1, 1, 1)$的解(x, y, z, n)称为它的例外解. 对此, 文[35]证明了: 方程(4.3)的例外解(x, y, z, n)必定满足$x > z > y$或者$y > z \geq x$. 由于对于任何的奇数b, 方程(4.3)显然都有例外解$(x, y, z, n) = (2, 3, 2, (b+1)/2)$, 所以确定方程(4.3)满足条件

$$y > z = x \tag{4.4}$$

的例外解是最终解决该方程求解问题的关键.

显然, 当x, y, z满足条件(4.4)时, 方程(4.3)可表成

$$2^y n^{y-x} = (b+2)^x - b^x, x, y, n \in \mathbb{N}, y > x. \tag{4.5}$$

本文运用初等方法以及同于的性质确定了方程(4.5)在$b \not\equiv 7(\mathrm{mod} 8)$时的全部解, 即证明了:

定理 当$b \not\equiv 7(\mathrm{mod} 8)$时, 方程(4.5)仅有解

$$n^x = \begin{cases} \left(2, 3, \frac{b+1}{2}\right), & b \equiv 1(\mathrm{mod} 4), \\ \left(2, 3, \frac{b+1}{2}\right) \text{和} \left(4, 5, \frac{b+1}{4}\right)(b^2+2b+2), & b \equiv 3(\mathrm{mod} 8)\text{且}\frac{b+1}{4}\text{不是平方数} \\ \left(2, 3, \frac{b+1}{4}\right), \left(2, 4, \sqrt{\frac{b+1}{4}}\right) \text{和} \left(4, 5, \frac{b+1}{4}\right)(b^2+2b+2), & b \equiv 3(\mathrm{mod} 8)\text{且}\frac{b+1}{4}\text{是平方数}. \end{cases}$$

§4.2　两个引理

对于素数p以及正整数m和t, 设$p^t \parallel m$表示$p^t \mid m$且$p^{t+1} \nmid m$.

引理2.1. 如果正偶数x可表成

$$x = 2^\alpha x_1, \alpha, x_1 \in \mathbb{N}, 2 \nmid x_1, \tag{4.6}$$

则对于任何偶数c必有

$$2^\alpha \parallel \sum_{i=0}^{x/2-1} \binom{x}{2i+1} c^{2i}. \tag{4.7}$$

证明 从(4.6)可知

$$2^\alpha \parallel \binom{x}{1}. \tag{4.8}$$

当$i \geq 1$时,因为

$$\binom{x}{2i+1} c^{2i} = x \binom{x-1}{2i} \frac{c^{2i}}{2i+1}, \tag{4.9}$$

其中$\binom{x-1}{2i}$是整数,$2i+1$是奇数, 所以从(4.6)和(4.9)可知

$$\binom{x}{2i+1} c^{2i} \equiv 0(\mathrm{mod} 2^{\alpha+1}), i \geq 1. \tag{4.10}$$

因此,从(4.8)和(4.10)即得(4.6). 证完.

引理2.2. 如果正偶数x满足

$$x \geq 2^{x-1}, \tag{4.11}$$

则$x = 2$; 如果

$$x \geq 2^{x-2}, \tag{4.12}$$

则$x = 2$或4.

证明 如果正偶数x满足(4.11)且$x > 2$, 则因$x \geq 4$，故有

$$\begin{aligned} x \geq 2^{x-1} &= (1+1)^{x-1} \\ &= \sum_{j=0}^{x-1} \binom{x-1}{j} > \binom{x-1}{0} + \binom{x-1}{1} + \binom{x-1}{x-2} + \binom{x-1}{x-1} \\ &= 2x > x. \end{aligned} \tag{4.13}$$

这一矛盾, 所以此时仅有$x = 2$.

同样, 如果正整数x满足(4.12)且$x > 4$, 则因$x \geq 6$, 故有

$$\begin{aligned} x \geq 2^{x-2} &= (1+1)^{x-2} \\ &= \sum_{j=0}^{x-2} \binom{x-2}{j} > \binom{x-2}{0} + \binom{x-2}{1} + \binom{x-2}{x-3} + \binom{x-2}{x-2} \\ &= 2x-2 > x. \end{aligned} \tag{4.14}$$

这一矛盾, 所以此时仅有$x = 2$或4. 引理证完.

§4.3 定理的证明

设(x, y, n)是方程(4.5)的一组解. 如果x是奇数, 则因$x-1$是偶数, b和$b+2$都是奇数, 故有

$$b^{x-1} \equiv (b+2)^{x-1} \equiv 1(\bmod 4). \tag{4.15}$$

然而,由于$y > x$, 所以$y \geq 2$, 故从(4.5)和(4.15)可得

$$0 \equiv 2^y n^{y-x} \equiv (b+2)^x - b^x \equiv (b+2) - b \equiv 2(\bmod 4). \tag{4.16}$$

这一矛盾. 由此可知x必为偶数, 即

$$2 \mid x. \tag{4.17}$$

从(4.17)可知x可表成(4.6)之形. 因为b是奇数, $b+1$是偶数, 所以$b+1$可表成

$$b+1 = 2^{\beta} d, \beta, d \in \mathbb{N}, 2 \nmid d. \tag{4.18}$$

由于x是偶数, 故有

$$\begin{aligned} (b+2)^x - b^x &= ((b+1)+1)^x - ((b+1)-1)^x \\ &= 2(b+1) \sum_{i=0}^{x/2-1} \binom{x}{2i+1} (b+1)^{2i}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

根据引理2.1, 从(4.6)可知

$$2^{\alpha} \parallel \sum_{i=0}^{x/2-1} \binom{x}{2i+1} (b+1)^{2i}. \tag{4.20}$$

所以从(4.18),(4.19)和(4.20)可得

$$2^{\alpha+\beta+1} \parallel (b+2)^x - b^x. \tag{4.21}$$

因此, 从(4.5)和(4.21)可知

$$\alpha + \beta + 1 \geq y \geq x + 1. \tag{4.22}$$

当$b \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$时, 从(4.18)可知此时$\beta = 1$. 将此代入(4.22)即得

$$\alpha \geq x - 1. \tag{4.23}$$

因此从(4.6)可知

$$x \geq 2^{\alpha}, \tag{4.24}$$

故从(4.23)和(4.24)可知x满足(4.11). 因此, 根据引理2.2可知此时x仅可能等于2.将此代入(4.5)可得

$$2^y n^{y-2} = (b+2)^2 - b^2 = 4(b+1) = 8\left(\frac{b+1}{2}\right), \tag{4.25}$$

其中$(b+1)/2$是奇数. 从(4.25)可知此时方程(4.5)仅有解

$$(x,y,n)=\left(2,3,\frac{b+1}{2}\right). \tag{4.26}$$

当$b\equiv 3(\bmod 4)$时, 从(4.18)可知此时$\beta=2$. 将此代入(4.22)即得

$$\alpha\geq x-2; \tag{4.27}$$

又从(4.24)和(4.27)可知x满足(4.12). 因此, 从引理2.2可知此时x仅可能等于2或4. 对于$x=2$时的情况,从(4.5)可得

$$2^y n^{y-2}=16\left(\frac{b+1}{4}\right), \tag{4.28}$$

其中$(b+1)/4$是奇数.因此, 从(4.28)可知$y=3$或4. 当$y=3$时, 从(4.28)可知方程(4.5)仅有解(4.26). 当$y=4$时,从(4.28)可得

$$n^2=\frac{b+1}{4}. \tag{4.29}$$

从(4.29)可知此时方程(4.5)当且仅当$(b+1)/4$是平方数时有解

$$(x,y,n)=\left(2,4,\sqrt{\frac{b+1}{4}}\right). \tag{4.30}$$

对于$x=4$时的情况,从(4.5)可得

$$2^y n^{y-4}=(b+2)^4-b^4=32\left(\frac{b+1}{4}\right)(b^2+2b+2), \tag{4.31}$$

其中$(b+1)(b^2+2b+2)/4$是奇数.因为$y>4$, 所以从(4.31)可知$y=5$, 而且此时方程(4.5)仅有解

$$(x,y,n)=\left(4,5,\left(\frac{b+1}{4}\right)(b^2+2b+2)\right) \tag{4.32}$$

综上所述即得本定理. 证完.

论文总结与前景展望

本文运用初等数论的方法研究了包含 $S(n)$ 及 $\sigma(n)$ 的方程的解的问题. 但所研究的内容远没有结束, 还有许多可以进一步拓展和研究的空间, 譬如:

(1) 如将第三章中所研究伪函数 $Z_1(n)$ 或 $S(n)$ 替换成欧拉函数然方程是否有解问题即

$$Z_1(n) = \varphi(n)$$

若有解那么又会得到什么结果?

(2) 如果将第四章中将 $\sigma(n)$ 与 $S(n)$ 联系起来又会得到什么样的结果?如当n取何值$\frac{\sigma(n)}{S(n)}$值为正整数.

(3) 关于Diophantine方程许多人进行了研究，对于指数Diophantine方程文中只给出了一小部分的解,那么其他情况下如对b的范围重新取值有没有解？若有解又会得到什么结果？这都是作者以后可以考虑的问题.

参考文献

[1] F.Smarandache. Only Problems,Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House,1993

[2] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想, 北京：科学出版社, 1981

[3] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论, 北京：北京大学出版社, 1992

[4] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论, 北京：科学出版社, 1999

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布 [J], 数学学报, Vol. 49(2006), No. 5, 1009-1012

[6] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the the Smarandache function[J], Scientia Magna, Vol. 2(2006), No. 1,76-79

[7] 张文鹏. 关于 F.Smarandache 函数的两个问题 [J], 西北大学学报, Vol. 38(2008), No. 2, 173-176

[8] 苏丽娟. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计 [J], 纺织高校基础科学学报, Vol. 22(2009),No. 1, 133-134

[9] 李玲, 姚维利. 一个包含 Smarandache 函数与伪 Smarandache 函数的方程及其正整数解 [J], 四川师范大学学报, Vol. 33(2010), No. 2

[10] 路玉麟. 一个包含 Smarandache 函数的方程 [J], 纺织高校基础科学学报, Vol.21(2008),No.2, 253-254

[11] 李粉菊, 杨畅宇. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计 [J], 西北大学学报, Vol. 41(2011), No. 4, 377-379

[12] 张文鹏, 李海龙. 初等数论 [M], 陕西师范大学出版社，西安, 2007

[13] 柯召等. 数论讲义 [M]. 北京：高等教育出版社, 1986

[14] 闵嗣鹤. 数论的方法 [M]. 北京：科学出版社, 1981

[15] 冯克勤. 代数数论 [M]. 北京：科学出版社, 2000

[16] Le Mao-hua. Two function equations [J]. Smarandache Notions Jounal, 2004, 14:180-182

[17] SANDOR J. On additive analogues of certain arithmetic function [J]. Smarandache NotionsJ, 2004, 14:128-132

[18] KASHIHARA K. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. New Mexico:Erhus University Press, 1996

[19] Tom M.Apstol. INtroduction to Analytic Number theory. New York: Springer-Verlag, 1976

[20] Guy R K . Unsolved problems in number theory , third edition [M] . Beijing : Science Press , 2007

[21] Sárközy A . Unsolved problems in number theory [J] . Period Math Hungar ,2001 , 42(1): 17-35

[22] 华罗庚. 数论导引 [M] . 北京：科学出版社, 1979

[23] 闵嗣鹤，严士健. 初等数论 [M] . 北京：高等教育出版社, 1957

[24] LUCA F. The anti-social fermat number [J]. Amer. Math.Monthly, 2000, 107: 171-173

[25] 沈忠华, 于秀源. 关于数论函数$\sigma(n)$的一个注记[J]. 数学研究与评论, 2007, 1: 121-129

[26] NATHANSON M B. Elementary Methods in number theroy [M]. New York: Spring-Verlag, 2000: 227

[27] BELLER A H. Recreations in the Theory of Numbers [M]. Shanghai: Shanghai Educational Publishing House, 1998: 10.(in Chinese)

[28] IRELAND K, ROSEN M. A classical introduction to modern theory, Graduate texts in mathematics 84[M]. Second Edition, New York Spring Verlag, 1990: 19

[29] 盖伊. 数论中未解决的问题(第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 2003

[30] Xu C ,Xu R-Z . On a conjecture concerning R(n) [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University , 2012 ,29(4) : 466-473

[31] Jeśmanowicz L., Several remarks on Pythagorean numbers [J]. Wiadom. Mat., 1955/1956, 1(2): 196-202. (in Polish)

[32] Terai N., The diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ [J]. Proc. Japan Acad., 1994, A70(1): 22-26.

[33] Luca F., On the system of diophantine equations $a^2 + b^2 = (m^2 + 1)^r$ and $a^x + b^y = (m^2 + 1)^z$ [J], Acta Arith.,2012, 153(4): 373-392.

[34] Miyazaki T. and Togbé A., The diophantine equation $(2am - 1)^x + (2m)^y = (2am + 1)^z$ [J], Int. J. Number Theory, 2012, 8(8): 2035-2044.

[35] Tang M. and Yang Q.-H., The diophantine equation $(bn)^x + (2n)^y = ((b + 2)n)^z$ [J], Colloq. Math., 2013, 132(1): 95-100.

攻读硕士学位期间取得的科研成果

[1] 车顺, 一个包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 及 $Z_1(n)$ 的方程及其整数解 [J], 纺织高校基础科学学报,Vol. 26, No. 1 March 2013

致谢

2007年8月, 我有幸考入西北大学数学系数学与用应用数学专业, 并在此度过了四年的大学时光，四年时间转瞬即逝，2011 年又很幸运通过了研究生考试得以继续留在西大读研究生，并师从著名数论专家张文鹏教授，从事数论的学习。三年的时间里，无论是学习上还是生活上张老师都给与我们最大的帮助。并组织了许多次的学术交流活动让我们得以扩展视野，近距离与大师接触。老师严谨的治学态度，卓越的科研能力以及独特的人格魅力给我们留下深刻的印象，这些在以后的人生中都将是我一笔受用终生的财富。

天下无不散之筵席，三年时光转瞬即逝，细细想来那年初来时的一幕幕依然历历在目，感谢在这七年之中陪伴我的舍友同学，你们让我感受到了最纯真的友情; 感谢数学系的各位老师你们在传输知识技能的同时你们的人格魅力同样让我受益无穷。在这里要特别感谢我的父母，无论何时何处何地，家永远都是我最坚强的后盾，你们毫无保留无私的付出永远铭刻我心，同样要感谢我的导师张文鹏教授对我一直以来的关心照顾，感谢师兄徐哲峰，刘华宁为我们这个数论大家庭所有成员的帮助和支持; 感谢老大,刘司，小白，王老师，何博士，小权，老戴，九思，强哥等谢谢你们一路相伴，感谢师兄吴振刚师姐王婷婷，王静哲对我的帮助.感谢师弟师妹及同级的韩迪，李敏，王小梅，童敏娜，吴成晶. 感谢我所有的老师和同学们，谢谢你们，期待着我们的再次重逢。

车顺

2014 年 3 月 5 日